

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**2019–2020 уч. год**  
**ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП**

**10 класс**

1. Существует ли арифметическая прогрессия из 10 натуральных чисел, 9 из которых – простые числа?
2. В турнире по волейболу в один круг (каждая команда играет с каждой один раз, ничьих не бывает) среди 7 команд в какой-то момент решили сократить число игр. Если команда выигрывала не менее четырех игр, то она объявлялась призером, и больше в турнире не играла. Какое наибольшее число призеров могло быть на турнире?
3. Существуют ли, такие натуральные  $x, y, z$  и простое число  $p$  для которых
$$(12x + 5)(12y + 7) = p^z.$$
4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $AH$  и  $CH$  соответственно. В окружности, описанной около треугольника  $BMN$ , проведен диаметр  $BD$ . Докажите, что  $AD = DC$ .
5. Числа  $a, b, c$  такие, что
$$a(b - c) = a^2bc + 1, b(c - a) = ab^2c + 1.$$
Чему может быть равно число  $abc^2$ ?