Р Е Ш Е Н И Я

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

9 класс

1. Различные натуральные числа *a*, *b*, *c*, *d* такие, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$. Обязательно ли какое-то из чисел *a*, *b*, *c*, *d* будет равно 2?

Ответ: да. Ни одно из чисел не может быть равно 1, так как в этом случае $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}>1$. Если ни одно из чисел не равно 2, то наибольшее возможное значение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ равно $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}<1$. Противоречие.

Комментарий. Правильный ответ без объяснений – 0 баллов.

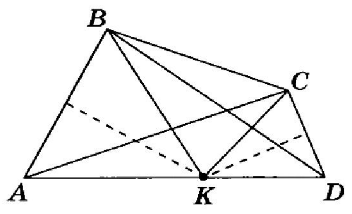
2. Из пункта А в пункт Б побежала Аня, а навстречу ей из Б в А одновременно вышла Лена. Когда Аня пробежала половину пути, расстояние между Аней и Леной было 2 км. Через некоторое время, когда Лена прошла одну третью часть пути от Б до А, расстояние между девочками опять стало равным 2 км. Найдите расстояние между А и Б.

Ответ: 6 км. Пусть *x* (км) - расстояние между А и Б, t_1 и t_2 – время с начала движения до того момента, когда расстояние между девочками первый и второй раз соответственно оказалось равным 2 км. Тогда $\frac{x}{2t_1}=\frac{\frac{2x}{3}+2}{t_2}$, $\frac{\frac{x}{2}-2}{t_1}=\frac{x}{3t_2}$ (равенства скоростей Ани и Лены). Из этих уравнений получаем $x=6$.

Комментарий. Правильный ответ – 1 балл. Составление уравнений без решения – 3 балла. (Уравнения могут быть другими, чем те, которые записаны в решении. Например, могут быть использованы скорости.)

3. В четырехугольнике *ABCD* $\angle BAD=\angle CDA$, а серединные перпендикуляры к сторонам *AB* и *CD* пересекаются в точке *K* на стороне *AD*. Докажите, что *AC* = *BD*.

***Решение.* Так как точка *K* лежит на серединных перпендикулярах к *AB* и *CD*, то *AK* = *BK*, *CK* = *DK*, $\angle KBA=\angle KAB=\angle KDC=\angle KCD$. Тогда $\angle AKB=\angle CKD$ и $\angle AKC=\angle AKB+\angle BKC=\angle CKD+\angle BKC=\angle BKD$. Отсюда следует, что треугольники *AKC* и *BKD* равны по двум сторонам и углу между ними и *AC* = *BD*.**



4. Докажите, что всех действительных чисел $(a^4+2)(b^2+2)+(a^2+2)(b^4+2) \geq 2((a^2+b)^2+(b^2+a)^2)$.

***Решение*. Если раскрыть все скобки и провести несложные преобразования, получим очевидное неравенство $(a^2b-2)^2+(b^2a-2)^2 \geq 0$. Возможны другие решения, в которых используются неравенства между средними арифметическими и средними геометрическими.**

5. Из чисел 1, 2, ..., 44, 45 выбрали произвольно 14 различных чисел. Докажите, что из этих 14 чисел можно выбрать четыре числа таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.

***Решение*. Из 14 различных чисел можно составить 14·13/2 = 91 пару. Каждая из 91 суммы не превосходит 45 + 44 = 89. Поэтому найдутся две различные пары с одинаковыми суммами. Эти пары состоят из четырех разных чисел.**

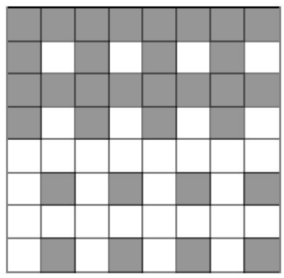
10 класс

1. Докажите, что число $2^{2018}+4^{505}9^8+3^{32}$ составное.

Решение. $\mathbf{2^{2018}+4^{505}9^8+3^{32}=(2^{1009}+3^{16})^2}$

Комментарий. Любое доказательство, что выражение делится на какое-то определенное число или что выражение раскладывается в произведение каких-то чисел, записанных в виде других числовых выражений (как в представленном решении) оценивается в 7 баллов.

2. Клетки доски 8 x 8 покрашены в черный и желтый цвета так, что клеток каждого цвета поровну (по 32). Какое наименьшее количество квадратов 2 x 2, в которых по 2 черных и желтых клетки, может быть на этой доске?



***Ответ*: 0. Один из примеров на рисунке.**

Комментарий. **П**равильный ответ без примера – 1 балл. Правильный пример – 7 баллов.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что PQ и AC параллельны. Точка M - середина BC, отрезок AM пересекает отрезок PQ в точке K так, что $PK = 5$, $KQ = 3$. Найдите длину AC..

***Ответ*: 13. Проведем среднюю линию ML. Треугольники ALM и APK подобны, $AK/AM = 5/ML = 10/AC$, и треугольники MAC и MKQ подобны, $MK/AM = 3/AC$. Складывая два равенства, получим $1 = 13/AC$, $AC = 13$.**

Комментарий. Проведение средней лини и обнаружение двух пар подобных треугольников - 2 балла.

4. Найдите все наборы целых чисел x, y, z, такие, что $x^2-y^2-z^2=1$, $y+z-x=3$.

***Ответ*: (-3, -2, 2), (-3, 2, -2), (9, 8, 4), (9; 8; 4). Из второго уравнения $x = y + z - 3$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим $9 + 2yz - 6y - 6z = 1$. Перепишем это уравнение в виде $(y-3)(z-3) = 5$. Возможны варианты: $y - 3 = 5$, $z - 3 = 1$ (тогда $y = 8$, $z = 4$, $x = 9$), $y - 3 = 1$, $z - 3 = 5$ (тогда $y = 4$, $z = 8$, $x = 9$), $y - 3 = -5$, $z - 3 = -1$ (тогда $y = -2$, $z = 2$, $x = -3$) или $y - 3 = -1$, $z - 3 = -5$ (тогда $y = 2$, $z = -2$, $x = -3$).**

Комментарий. Все ответы без обоснования – 1 балл. Записано уравнение $9 + 2yz - 6y - 6z = 1$ без последующего решения – 1 балл. Записано уравнение $(y-3)(z-3) = 5$, но рассмотрены только варианты с положительными значениями – 5 баллов.

5. Можно ли число 8192 представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел?

***Ответ*: нет. Так как 8192 = 2^{13}, то у этого числа только один простой делитель, равный 2. Предположим, что число 8192 можно получить, складывая k последовательных чисел, начиная с числа t. Так как $t + (t+1) + (t+2) + \ldots + (t+k-1) = kt + k(k-1)/2 = k(2t+k-1)/2$, то для четного k число $2t + k - 1$ - нечетное. Значит, сумма k последовательных чисел содержит не-**

четный делитель. Если k - нечетное число, то, очевидно, само это число и будет нечетным делителем суммы k последовательных чисел. Противоречие.

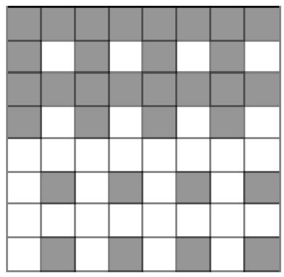
11 класс

1. Из пункта А в пункт Б побежала Аня, а навстречу ей из Б в А одновременно вышла Лена. Когда Аня пробежала половину пути, расстояние между Аней и Леной было 2 км. Через некоторое время, когда Лена прошла одну третью часть пути от Б до А, расстояние между девочками опять стало равным 2 км. Найдите расстояние между А и Б.

   ***Ответ*: 6 км. Пусть x (км) - расстояние между А и Б, t_1 и t_2 – время с начала движения до того момента, когда расстояние между девочками первый и второй раз соответственно оказалось равным 2 км. Тогда $\frac{x}{2t_1}=\frac{\frac{2x}{3}+2}{t_2}$, $\frac{\frac{x}{2}-2}{t_1}=\frac{x}{3t_2}$ (равенства скоростей Ани и Лены). Из этих уравнений получаем $x=6$.**

   Комментарий. Правильный ответ – 1 балл. Составление уравнений без решения – 3 балла. (Уравнения могут быть другими, чем те, которые записаны в решении. Например, могут быть использованы скорости.).

2. Клетки доски 8 х 8 покрашены в черный и желтый цвета так, что клеток каждого цвета поровну (по 32). Какое наименьшее количество квадратов 2 х 2, в которых по 2 черных и желтых клетки, может быть на этой доске?

   ***Ответ*: 0. Один из примеров на рисунке.**

   Комментарий. Правильный ответ без примера – 1 балл. Правильный пример – 7 баллов.

3. На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечены точки L и K так что $BL = LK = KC$, а на стороне AD - точка M, $AM = AD/3$. Найдите $\angle ALM + \angle AKM + \angle ACM$.

   ***Ответ*: 45°. Пусть P - середина отрезка MD. Тогда $\Delta ALM = \Delta PCD$ и $\angle ALM = \angle PCD$, $\Delta AKM = \Delta MCP$ и $\angle AKM = \angle MCP$. Значит, $\angle ALM + \angle AKM + \angle ACM = \angle ACD = 45°$.**

   Комментарий. Правильный ответ без объяснений – 1 балл.

4. Действительные числа x, y, z, t такие, что $0 \le x, y, z, t \le 1$. Найдите наибольшее значение выражения $x + y + z + t - xy - yz - zt - tx$.

   ***Ответ*: 2. Оценка. Преобразуем исходное выражение: $x + y + z + t - xy - yz - zt - tx = \big((x+z)-1\big)\big(1-(y+t)\big)+1$. Так как $x+z \le 2$, $y+t \ge 0$, то $\big((x+z)-1\big)\big(1-(y+t)\big)+1 \le (2-1)(1-0)+1 = 2$. Пример. Если $x=z=1$, $y=t=0$, то выражение равно 2.**

   Комментарий. Правильный пример без оценки – 2 балла. Оценка без примера – 3 балла.

5. Найдите все такие простые числа p и q $(p > q)$, что $p + q$ не делится на 3, а $(p + q)^3$ делится на $(p - q)^2$.

   ***Ответ*: $p = 3, q = 2$ и $p = 5, q = 3$. Если ни одно из чисел p и q не равно 3, то или $p + q$ делится на 3, если остатки от деления на 3 чисел p и q различны, или $p - q$ делится на 3, но $p + q$ не делится на 3 (если остатки от деления на 3 чисел p и q одинаковы). Значит, одно из чисел p и q равно 3. Пусть $p = 3$, тогда $q = 2$ и условие выполняется. Если $q = 3$, то $(p + 3)^3$ должно делиться на $(p - 3)^2$. Так как $p > 3$, то НОД $(p + 3, p - 3)$ = НОД $(6, p - 3) = 2$. Поэтому $p - 3 = 2^k$ (иначе у $p-3$ есть простой делитель, отсутствующий у числа $p + 3$). Если $k > 1$, то $(p - 3)^2$ делится на 16, а $(p + 3)^3$ делится только на 8. Значит, $p = 5$. Пара $p = 5, q = 3$ подходит.**

   Комментарий. Два правильных ответа без объяснения – 1 балл. Доказательство того, что одно из чисел равно 3, оценивается еще в 2 балла. Если доказано, что одно из чисел равно 3, а для $q = 3$ значение p может быть равно только 5, но при этом пропущено решение $p = 3, q = 2$, то оценка за такое решение – 5 баллов.