Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. Иркутск, 2018.

Р Е Ш Е Н И Я

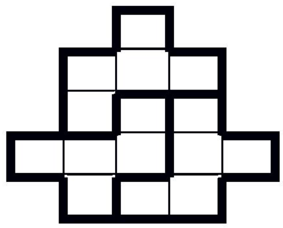
4 класс

1. Вовочка по чётным числам всегда говорит правду, а по нечётным всегда обманывает. В феврале его три дня подряд спрашивали: «Сколько тебе лет?». В первый день он ответил: «9», во второй: «8», в третий: «7». Сколько ему лет? (Ответ надо обосновать).

Ответ: 8 лет.

Решение. Так как Вовочка дал три разных ответа, идущих по убыванию, то он хотя бы два раза солгал, поэтому два дня из трёх приходились на нечётные числа. Так как чётные и нечётные числа чередуются, то это должны быть первый и третий день. Значит, второй день пришёлся на чётное число и в этот день Вовочка сказал правду. Ему 8 лет.

Критерии. *Только правильный ответ – 1 балл. Если при правильном ответе в решении сказано про два случая лжи из-за разных ответов, но не упоминается про убывание чисел – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.*



2. Разрежьте фигуру на рисунке на три одинаковые части по линиям сетки.

Ответ: см. рисунок.

Критерии. *Верный рисунок без пояснений – 7 баллов. Если приводится несколько вариантов, то баллы не добавляются.*

3. Два брата, Макар и Пахом, привезли на мельницу мешки с зерном. У Макара было 5 больших мешков и 3 маленьких, а у Пахома – 3 больших и 5 маленьких. За помол большого мешка мельник берёт в 3 раза больше, чем за помол маленького. Макар заплатил за помол своего зерна на 40 рублей больше, чем Пахом. Сколько заработал мельник за помол всего зерна? (Ответ надо обосновать).

Ответ: 320 рублей.

Решение. Так как за помол большого мешка плата в 3 раза больше, то Макар заплатил за 18 маленьких мешков, а Пахом – за 14 маленьких мешков, т.е. у Макара на 4 маленьких мешка больше. Тогда помол маленького мешка стоит 10 рублей, а за все 32 маленьких мешка мельник получит 320 рублей.

Критерии. *Только правильный ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.*

4. В трех играх чемпионата по футболу команда забила три гола и пропустила в свои ворота один гол. За каждую победу команда получает 3 очка, за ничью – 1 очко, а за поражение – 0 очков. Сколько очков могла набрать команда за эти три игры? (Найдите все ответы и докажите, что других нет).

Ответ: 4, 5, 6 или 7 очков.

Решение. Три игры команда выиграть не могла, так как для победы в каждом матче надо забить хотя бы на 1 гол больше, т.е. хотя бы на 3 гола больше за 3 матча, а разность голов – всего 2. Так же не могло быть двух поражений, так как тогда нужно пропустить хотя бы 2 гола. Обязательно должна быть хотя бы одна победа, так как забито голов больше, чем пропущено. Значит, не может быть 0, 1, 2, 3 очков (минимум одна победа и одна ничья есть) и 9 очков. 8 очков при 3 играх не может получиться. Примеры на остальные случаи: 4 очка (3:0, 0:0, 0:1), 5 очков (2:0, 1:1, 0:0), 6 очков (2:0, 1:0, 0:1), 7 очков (2:1, 1:0, 0:0).

Критерии. *Только полный правильный ответ – 1 балл. Только доказано, что не бывает 0, 1, 2, 3, 8 и 9 очков – 3 балла. Только приведены примеры на 4, 5, 6, 7 очков – 3 балла. Если какие-то из случаев не доказаны – количество баллов снижается пропорционально. Полное решение – 7 баллов.*

5. Разность двух четырехзначных чисел равна 7. Для каждого из этих чисел Петя вычислил сумму цифр, а потом из большей суммы вычел меньшую. Какой результат он мог получить? (Найдите все ответы и докажите, что других нет).

Ответ: 2, 7, 11, 20.

Решение. 1) Если последняя цифра меньшего числа 0, 1 или 2, то сумма цифр отличается на 7.

2) Если последняя цифра меньшего числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а цифра десятков не 9, то у большего числа в разряде десятков цифра на 1 больше, а в разряде единиц на 3 меньше. Тогда разность сумм цифр равна 2.

3) Если последняя цифра меньшего числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, цифра десятков – 9, а цифра сотен не 9, то у большего числа в разряде сотен цифра на 1 больше, в разряде десятков на 9 меньше, в разряде единиц на 3 меньше. Тогда разность сумм цифр равна 11.

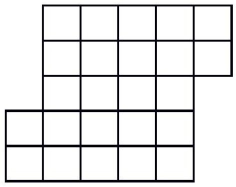
4) Если последняя цифра меньшего числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, цифры десятков и сотен – 9, а цифра тысяч не 9, то у большего числа в разряде тысяч цифра на 1 больше, в разряде десятков и сотен на 9 меньше, в разряде единиц на 3 меньше. Тогда разность сумм цифр равна 20.

5) Меньшее число не может начинаться с трёх девяток, если последняя цифра 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9.

Критерии. *Только полный правильный ответ – 1 балл. Если обоснованно получен один ответ – 2 балла, два ответа – 3 балла, три ответа – 4 балла. Полное решение – 7 баллов.*

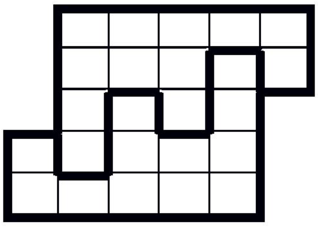
Р Е Ш Е Н И Я **5 класс**

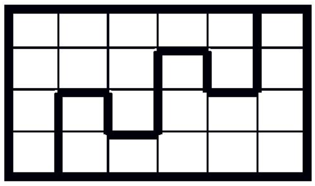
1. Разрежьте фигуру на рисунке на две одинаковые части по линиям сетки и сложите из них прямоугольник 4 × 6 клеток. Покажите, как надо резать и как складывать.



Ответ: см. рис.

Критерии. *Для получения 7 баллов достаточно правильного рисунка. Правильные рисунки могут отличаться от приведённых в решении. Любой неправильный рисунок – 0 баллов. Если показано только как разрезать фигуру или только как сложить прямоугольник – 3 балла.*





2. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код – число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Найдите код для открытия сейфа. (Ответ надо обосновать).

Ответ: 2222232.

Решение. В коде не меньше 4 двоек. Чтобы число делилось на 3, надо чтобы сумма цифр делилась на 3. Тогда количество двоек должно делится на 3. Тогда должно быть 6 двоек и 1 тройка. Чтобы число делилось на 4, последние две цифры должны образовывать число, делящееся на 4. Из двоек и троек можно собрать только число 32. Значит, код 2222232.

Критерии. *Только правильный ответ – 1 балл. Доказано, что в числе 6 двоек и 1 тройка – 2 балла, с правильным ответом – 3 балла. Доказано, что число заканчивается на 32 – 2 балла, с правильным ответом – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.*

3. На экране компьютера – число 141. Каждую секунду компьютер перемножает все цифры числа на экране, полученное произведение либо прибавляет к этому числу, либо вычитает из него, а результат появляется на экране вместо исходного числа. Появится ли еще когда-нибудь на экране число 141? (Ответ надо обосновать).

Ответ: нет.

Решение. После первого изменения на экране будет 141 – 4 = 137 или 141 + 4 = 145. В случае числа 137 все дальнейшие преобразования приводят к чётным числам и 141 не получится. В случае числа 145 получаем 125 или 165, затем 115, 135 или 195. Следующим ходом получаем числа 110, 120, 150, 240, которые в дальнейшем не меняются.

Критерии. *Только ответ – 0 баллов. При потере одного из случаев снимается 2 балла; потеря больше одного случая – за решение не больше 3 баллов. Полное решение – 7 баллов.*

4. Произведение 1998 натуральных чисел равно 105, а их сумма равна 2018. Найдите эти числа. (Ответ надо обосновать).

Ответ: 7, 15 и 1996 единиц.

Решение. Число 105 = 3 × 5 × 7 и может быть получено произведением: а) числа 105 и 1997 единиц (с суммой 2102); б) чисел 7, 15 и 1996 единиц (с суммой 2018) (искомый набор); в) чисел 5, 21 и 1996 единиц (с суммой 2022); г) чисел 3, 35 и 1996 единиц (с суммой 2034); д) чисел 3, 5, 7 и 1995 единиц (с суммой 2010). Других вариантов нет (взяли произведение всех трёх множителей, все наборы произведений по два и одно отдельно и набор со всеми множителями отдельно).

Критерии. *Только ответ – 1 балл. Рассмотрено 2-3 случая с правильным ответом – 3 балла, рассмотрено 4 случая с правильным ответом – 4 балла. Если правильного ответа нет – не больше 2 баллов в зависимости от количества рассмотренных случаев. Полное решение – 7 баллов.*

5. Тётя Груша продаёт кабачки. Три кабачка она продаёт за 5 рублей, четыре кабачка – за 6 рублей, а пять кабачков – за 7 рублей. Ни в каком другом количестве тётя Груша кабачки не продаёт. Вчера она продала 100 кабачков и выручила за них 160 рублей. Сколько покупателей было вчера у тёти Груши? (Ответ надо обосновать).

Ответ: 30.

Решение. Будем считать, что по рублю с продажи каждого кабачка тётя Груша кладёт в фартук, а остальное (получается как раз 2 рубля с каждой продажи) – в карман. Тогда в конце дня в фартуке окажется 100 рублей. Значит, в кармане окажется 160 – 100 = 60 рублей, а раз с каждой продажи в карман шло по 2 рубля, то продаж было 30.

Критерии. *Только ответ – 1 балл. Любой правильный пример с ответом – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.*

Р Е Ш Е Н И Я

6 класс

1. В десятичной записи числа 59876 использованы 5 последовательных цифр 5, 6, 7, 8 и 9. Чему равно следующее по величине пятизначное число, также записанное пятью последовательными цифрами? (Ответ надо обосновать).

Ответ: 62345.

Решение. Число 59876 самое большое из начинающихся на 5 и записанных подряд идущими цифрами. Значит, следующее число должно начинаться на 6. Набор наименьших подряд идущих цифр, содержащий 6, это 2, 3, 4, 5, 6. Число начинается с 6, а следующие цифры должны идти в порядке возрастания, иначе число получится больше. Значит, следующее число 62345.

Критерии. *Только ответ – 1 балл. Найден правильный набор цифр, но число не наименьшее – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.*

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 19 имеет остаток 16, при делении на 20 имеет остаток 17, при делении на 21 имеет остаток 18. (Ответ надо обосновать).

Ответ: 7977.

Решение. Добавим к искомому числу 3. Полученное число делится без остатка на 19, 20 и 21. Так как числа 19, 20 и 21 взаимно просты, то наименьшим числом, делящимся на 19, 20 и 21 будет являться число $19 \cdot 20 \cdot 21 = 7980$, отсюда искомое число $7980 - 3 = 7977$.

Критерии. *Только ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.*

3. Катер проплыл расстояние от A до B по течению реки за 6 суток, а обратно от B до A за 8 суток. За какое время проплывет от A до B плот? (Ответ надо обосновать).

Ответ: 48 суток.

Решение. Примем всё расстояние за 1. Тогда скорость по течению 1/6, против течения – 1/8. Тогда удвоенная скорость течения 1/6 – 1/8 = 1/24. Тогда скорость течения 1/48. Время в пути – 48 суток.

Критерии. *Только правильный ответ – 1 балл. Если будет приведён пример для конкретного расстояния и для него будет всё подсчитано – 2 балла. При правильном решении допущена арифметическая ошибка – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.*

4. Имеется много одинаковых квадратов. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3 и 4. Квадраты сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из четырёх углов стопки. Может ли оказаться так, что в каждом углу стопки сумма равна 2018? (Ответ надо обосновать).

Ответ: нет.

Решение. Допустим, что такое возможно. Пусть число квадратов – x. Посчитаем сумму всех чисел на всех квадратах двумя способами. На каждом квадрате сумма чисел 10, а всего $10x$. С другой стороны, сумма всех чисел равна $4 \times 2018 = 8072$. Это число не делится на 10 и не может быть равно $10x$. Противоречие.

Критерии. *Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.*

5. Назовем старшим делителем числа самый большой из его делителей, не равный самому числу, а младшим делителем назовем самый маленький делитель, не равный 1. Например, у числа 12 старший делитель равен 6, а младший – 2. Найдите все числа, у которых старший делитель в 15 раз больше младшего. (Ответ надо обосновать).

Ответ: 60 и 135.

Решение. Пусть искомое число a, а наименьший делитель x. Тогда наибольший делитель a/x. Получаем $a/x = 15x$, откуда $a = 15x^2$. При этом a делится на 3, а значит, x не больше 3. Если $x = 2$, то $a = 60$. Если $x = 3$, то $a = 135$.

Критерии. *Только полный ответ – 1 балл. Составлено уравнение – 1 балл. Если и то, и другое – 2 балла. Потеря одного ответа при полном обосновании – 4 балла. Полное решение – 7 баллов.*

Р Е Ш Е Н И Я
7 класс

1. Можно ли в клетки таблицы размером 4×4 вписать по целому числу так, чтобы сумма всех чисел таблицы была положительной, а сумма чисел в каждом квадрате размера 3×3 была отрицательной?

Ответ: Можно.

Решение. Один из возможных примеров на рисунке.

7	– 1	– 1	7
– 1	– 1	– 1	– 1
– 1	– 1	– 1	– 1
7	– 1	– 1	7

Критерии. *Только ответ – 0 баллов. Любой правильный пример – 7 баллов. Любой неправильный пример – 0 баллов.*

2. Сумма трёх различных натуральных чисел равна 100. Из этих чисел можно составить три попарные разности (при вычислении разности из большего числа вычитают меньшее). Какое наибольшее значение может принимать сумма этих попарных разностей?

Ответ: 192.

Решение. Пусть даны числа $a > b > c$. Тогда сумма попарных разностей примет вид $(a – b) + (a – c) + (b – c) = 2a – 2c = 2(a – c)$. Наибольшее значение она принимает при наибольшем a и наименьшем c. Наименьшее значение $c = 1$, тогда $b \geq 2$, $a \leq 97$. Наибольший результат $2(97 – 1) = 192$.

Критерии. *Только ответ – 1 балл. Получено выражение для разности без дальнейшего продвижения – 2 балла. Найден пример для получения суммы 192 – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.*

3. Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Докажите, что это число делится на 7 тогда и только тогда, когда две его последние цифры равны.

Решение. Пусть число имеет две равные последние цифры: $\overline{abb}$, где $a + 2b = 7$.

Тогда $\overline{abb} = 100a + 10b + b = 100(7 – 2b) + 11b = 700 – 189b = 7(100 – 27b)$, делится на 7.

Пусть число $\overline{abc}$ делится на 7 и $a + b + c = 7$. $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 100(7 – b – c) + 10b + c =$

$= 700 – 90b – 99c = 700 – 91b – 98c + b – c = 7(100 – 13b – 14c) + b – c$. Значит, $b – c$ делится на 7. Это возможно лишь при $b = c$.

Критерии. *Если доказано одно из двух утверждений – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.*

4. На сторонах и диагоналях семнадцатиугольника расставлены числа + 1 и – 1. Докажите, что найдётся такая вершина, что произведение чисел, находящихся на двух сторонах и четырнадцати диагоналях, выходящих из этой вершины, равно 1.

Решение. Пусть для всех вершин такое произведение равно – 1. Значит, из каждой вершины выходит нечётное число отрезков с – 1. Рассмотрим граф, содержащий только рёбра с – 1. Посчитаем количество рёбер. Оно равно суммарной степени вершин, делённой на 2 (так как каждое ребро посчитано 2 раза). Но сумма семнадцати нечётных чисел – нечётное число. Такое невозможно. Противоречие.

Критерии. *Любое количество примеров – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.*

5. На доске написаны числа от 1 до 9. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) их стирают, пока не останется два числа. Если сумма оставшихся чисел делится на три, то выигрывает Петя, иначе – Вася. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Петя.

Решение. Вместо чисел рассмотрим их остатки от деления на 3. У нас есть остатки 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2. Рассмотрим стратегию выигрыша для Пети. Первым ходом он убирает 0. После хода Васи получаем три возможных варианта 0111222, 0011222, 0011122. В первом случае Петя убирает 0 и получает 111222, во втором и третьем случае получает 001122, убирая соответственно 2 или 1. В первом случае на любой ход Васи Петя отвечает противоположным и получает 1122, в оставшемся случае если Вася убирает 0, то Петя убирает 0, а если Вася убирает 1 или 2, то Петя 2 или 1 соответственно. Тогда получатся ситуации 1122 или 0012. В первой из них после любого хода Васи Петя делает 12, во втором либо 00 (если Вася убирает 1 или 2) или 12 (если Вася убирает 0). В любом случае сумма оставшихся чисел делится на 3.

Критерии. *Только правильный ответ – 0 баллов. Если упущены какие-то случаи – не более 3 баллов. Полное решение – 7 баллов.*

Р Е Ш Е Н И Я **8 класс**

1. Сколько слагаемых суммы 1 + 2 + 3 + … надо взять, чтобы получить трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

Ответ: 36 слагаемых.

Решение. Пусть слагаемых n, а цифры числа – a, тогда $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2 = 111a$, $n(n + 1) = 222a$, $n(n + 1) = 37\times2\times3\times a$, тогда наименьшее подходящее $a = 6$, $n = 36$ (так как 37 – простое число). Возможно решение с помощью последовательного прибавления чисел, пока не получится нужный результат.

Критерии. *Только правильный ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов. Если при последовательном прибавлении не приведены все вычисления – 5 баллов.*

2. Известно, что числа a, b, c и d – целые и $\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{a+b}{c+d}$. Может ли выполняться равенство

$$abcd = 201620172018?$$

Ответ: нет.

Решение. Преобразуем данное равенство: $(a - b)(c + d) = (a + b)(c - d) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ac + ad - bc - bd = ac - ad + bc - bd \Leftrightarrow ad = bc$. Предположим, что $abcd = 201620172018$. Тогда $(ad)^2 = 201620172018$, что невозможно, так как число 201620172018 не является квадратом никакого целого числа (делится на 3, не делится на 9; делится на 2, не делится на 4; оканчивается на 8, а квадрат не может оканчиваться на 2, 3, 7 или 8).

Критерии. *Только правильный ответ – 0 баллов. Доказано, что $ad = bc$ – 2 балла. Для доказательства, что 201620172018 – не квадрат, достаточно любого из 3 приведённых вариантов или любого аналогичного им, при этом должно быть объяснено, почему число делится на что-то или не делится. При отсутствии объяснения – снять 2 балла. Полное решение – 7 баллов.*

3. Какое максимальное число квадратов 2 × 2 можно уложить на клетчатую доску размера 7 × 7 клеток так, чтобы каждые два уложенных квадрата имели не больше одной общей клетки? Квадраты 2 × 2 укладываются по линиям сетки так, что каждый закрывает ровно 4 клетки. Квадраты не выходят за границу доски.

Ответ: 18 квадратов.

Решение. Пример укладки 18 квадратов 2 × 2: 9 из них покрывают левый нижний квадрат размера 6 × 6 доски, а остальные 9 покрывают правый верхний квадрат размера 6 × 6 доски. Докажем, что 19 квадратов правильно уложить нельзя. Если клетка доски, примыкающая к границе, покрывается двумя квадратами, то они пересекаются минимум по двум клеткам, и, если клетка доски, не примыкающая к границе, покрывается тремя квадратами, то два из них пересекаются минимум по двум клеткам. Следовательно, граничные клетки доски могут быть покрыты квадратами не более одного раза, а внутренние — не более двух. Следовательно, всего квадраты могут содержать не более $24 \cdot 1 + 25 \cdot 2 = 74$ клеток и всего квадратов не более $74 : 4 = 18{,}5$ штук.

Критерии. *Только ответ – 1 балл. Только приведён пример на 18 квадратов – 3 балла. Только доказано, что больше 18 квадратов не получится – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.*

4. Транснациональная корпорации «Максикола» имеет региональные подразделения более чем в 10 государствах. В течении года подразделения могли устраивать межрегиональные проекты. (по правилам ВТО – не более одного между любыми двумя). Известно, что за год количество совместных проектов с другими подразделениями у каждого подразделения делится на 10. Докажите, что в этом году не менее чем у 11 подразделений количество совместных проектов совпадает.

Решение. От противного. Пусть нет таких 11 подразделений. Рассмотрим подразделение A с наибольшим количеством проектов. Пусть их $10n$. Рассмотрим подразделения, связанные с A. Подразделений с 10 проектами не более 10, подразделений с 20 проектами не более 10, …, подразделений с $10\ (n - 1)$ проектами не более 10. Тогда подразделений с $10n$ проектами хотя бы 10, а вместе с A – хотя бы 11. Противоречие.

Критерии. *Полное решение – 7 баллов. Идея принципа максимума – 1 балл.*

5. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.

Решение. Пусть $AC = c$, $BC = a = CD$, $DE = x = CE$. Тогда $AD = c - a$, $BE = a - x$, $AD + BE = c - x$. Достроим треугольник до равнобедренного треугольника ACK, чтобы $CK = AC = c$. Треугольники ABC и KDC равны по двум сторонам и общему углу между ними. Рассмотрим равнобедренный треугольник CDE. Пусть углы ECD и EDC равны α. Тогда угол KDE равен углу DKE и равен $90° - \alpha$. Тогда $KE = DE = x$, $AC = CK = KE + CE = 2x = c$. Отсюда $DE = x = c - x = AD + BE$.

Критерии. *За дополнительное построение – 1 балл. За доказательство, что c = 2x – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.*